CHAÎNES DE MARKOV CACHÉES À BRUIT GÉNÉRALISÉ

Katherine Morales,
Hugo Gangloff, Yohan Petetin

Introduction

Introduction
Inférence variationnelle dans les CMC-BG
Segmentation d'images avec les CMC-BG
Conclusions
Références

Notation

- $\boldsymbol{x}_K = (x_0, x_1, \ldots, x_K)$: variables aléatoires (v.a.) observées.
- $\boldsymbol{h}_K = (h_0, h_1, \ldots, h_K)$: v.a. cachées
- $\boldsymbol{z}_K = (z_0, z_1, \ldots, z_K)$: v.a. auxiliaires et cachées
- $\boldsymbol{\theta}$: l'ensemble de paramètres inconnus.
- $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}_K)$: la loi jointe d'un triplet $\boldsymbol{t}_K = (\boldsymbol{h}_K, \boldsymbol{z}_K, \boldsymbol{x}_K)$

Introduction
Inférence variationnelle dans les CMC-BG
Segmentation d'images avec les CMC-BG
Conclusions
Références

Notation

- $\boldsymbol{x}_K = (x_0, x_1, \ldots, x_K)$: variables aléatoires (v.a.) observées.
- $\boldsymbol{h}_K = (h_0, h_1, \ldots, h_K)$: v.a. cachées
- $\boldsymbol{z}_K = (z_0, z_1, \ldots, z_K)$: v.a. auxiliaires et cachées
- $\boldsymbol{\theta}$: l'ensemble de paramètres inconnus.
- $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}_K)$: la loi jointe d'un triplet $\boldsymbol{t}_K = (\boldsymbol{h}_K, \boldsymbol{z}_K, \boldsymbol{x}_K)$

$\rightarrow$ Comment choisir $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}_K)$?

Chaînes de Markov Cachées Triplet

Introduction
Inférence variationnelle dans les CMC-BG
Segmentation d'images avec les CMC-BG
Conclusions
Références

Nous proposons un modèle de Chaînes de Markov Cachées (CMC) triplet[1] à variable auxiliaire latente continue.

CMC triplet s'écrit :

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}_K) = p_{\boldsymbol{\theta}}(h_0) \prod_{k=1}^{K} p_{\boldsymbol{\theta}}(h_k|h_{k-1}) \prod_{k=0}^{K} p_{\boldsymbol{\theta}}(z_k) p_{\boldsymbol{\theta}}(x_k|h_k, z_k).$$

Chaînes de Markov Cachées Triplet

Nous proposons un modèle de Chaînes de Markov Cachées (CMC) triplet[1] à variable auxiliaire latente continue.

CMC triplet s'écrit :

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}_K) = p_{\boldsymbol{\theta}}(h_0) \prod_{k=1}^{K} p_{\boldsymbol{\theta}}(h_k|h_{k-1}) \prod_{k=0}^{K} p_{\boldsymbol{\theta}}(z_k) p_{\boldsymbol{\theta}}(x_k|h_k, z_k).$$

$\rightarrow$ Estimation des paramètres $\boldsymbol{\theta}$?

Inférence Variationnelle

Introduction
Inférence variationnelle dans les CMC-BG
Segmentation d'images avec les CMC-BG
Conclusions
Références

- Estimation $\boldsymbol{\theta}$ du modèle lorsque les lois $p_{\boldsymbol{\theta}}(z|x)$, ne sont pas connues.
- Approximées par $q_{\boldsymbol{\varphi}}(z|x)$ où $\boldsymbol{\varphi}$ doit être estimé.
- Maximisation de $F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$, une borne inférieure de la log-vraisemblance (ELBO)[2]

$$\log p_{\boldsymbol{\theta}}(x) \geq \int q_{\boldsymbol{\varphi}}(z|x) \log \frac{p_{\boldsymbol{\theta}}(z,x)}{q_{\boldsymbol{\varphi}}(z|x)} \mathrm{d}z = F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}),$$

où $F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbb{E}_{q_{\boldsymbol{\varphi}}(z|x)}(p_{\boldsymbol{\theta}}(x|z)) - \mathrm{D}_{\mathrm{KL}}(q_{\boldsymbol{\varphi}}(z|x)||p_{\boldsymbol{\theta}}(z))$.

Inférence variationnelle dans les CMC-BG

Estimation des paramètres dans les CMC-BG.

Introduction
Inférence variationnelle dans les CMC-BG
Segmentation d'images avec les CMC-BG
Conclusions
Références

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi}) =& \mathbb{E}_{q_{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{h}_K,\boldsymbol{z}_K|\boldsymbol{x}_K)}(\log \prod_{k=0}^{K} p_{\boldsymbol{\theta}}(x_k|h_k,z_k)) \\ &- \beta_1 \, \mathrm{D_{KL}}(q_{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{h}_K,\boldsymbol{z}_K|\boldsymbol{x}_K)||p_{\boldsymbol{\theta}}(h_0)p_{\boldsymbol{\theta}}(z_0)\prod_{k=1}^{K} p_{\boldsymbol{\theta}}(z_k)p_{\boldsymbol{\theta}}(h_k|h_{k-1})) \\ &+ \beta_2 \, \mathbb{E}_{p^{\mathrm{emp}}(\boldsymbol{h}_K)}\left(\log q_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{h}_K|\boldsymbol{x}_K)\right),\end{aligned}$$

- $q_{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{h}_K,\boldsymbol{z}_K|\boldsymbol{x}_K) = p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{h}_K|\boldsymbol{z}_K,\boldsymbol{x}_K)q_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{z}_K|\boldsymbol{x}_K)$
- $p^{\mathrm{emp}}(\boldsymbol{h}_K) = \delta_{\boldsymbol{h}_K^{\mathrm{pre}}}(\boldsymbol{h}_K)$ fait intervenir une pré-segmentation déjà disponible.
- $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{h}_K|\boldsymbol{z}_K,\boldsymbol{x}_K)$ est calculable exactement par un algorithme de F-B.
- β_1 et β_2 hyper-paramètres de pénalisation.

Estimation des états cachés. La distribution *a posteriori*, peut être calculée par échantillonnage séquentiel.

Paramétrisation profonde des modèles. Suivant [3], des paramétrisations profondes sont utilisées pour les lois de probabilités $q_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{z}_K|\boldsymbol{x}_K)=\prod_{k=1}^{K} q_{\boldsymbol{\varphi}}(z_k|z_{k-1},x_k)$ et $p_{\boldsymbol{\theta}}(x_k|h_k,z_k)$: ces lois sont choisies comme des loi normales de moyennes paramétrées par un réseau à une couche cachée de 100 neurones + activation ReLU.

Algorithme 1 : Estimation des paramètres dans les CMC-BG.

Entrée : $\boldsymbol{x}_K$, les observations

Initialiser $(\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\varphi}^{(0)})$, $t \leftarrow 0$

tant que *convergence pas atteinte* **faire**

Tirer $\boldsymbol{z}_K^{(n)} \sim q_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{z}_K | \boldsymbol{x}_K)$

Calculer $p_{\boldsymbol{\theta}}(h_{k-1} | h_k, \boldsymbol{z}_K^{(n)}, \boldsymbol{x}_K)$

Calculer la dérivée $\nabla_{(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi})} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$

Mettre à jour les paramètres

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^{(t+1)} \\ \boldsymbol{\varphi}^{(t+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^{(t)} \\ \boldsymbol{\varphi}^{(t)} \end{pmatrix} + \epsilon \nabla_{(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi})} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}) \Big|_{(\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \boldsymbol{\varphi}^{(t)})}$$

$t \leftarrow t + 1$

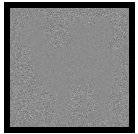
$\boldsymbol{\theta}^* \leftarrow \boldsymbol{\theta}^{(t)}$

$\boldsymbol{\varphi}^* \leftarrow \boldsymbol{\varphi}^{(t)}$

Segmentation d'images avec les CMC-BG

Bruit multiplicatif. On génère une observation $\boldsymbol{x}$ selon :

$$x_k | h_k, z_k \sim \mathcal{N}\left(a_{h_k}; b_{h_k}^2\right) * z_k.$$

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{x}$	CMC	CMC-BG-di	CMC-BG	D-CMC-BG
					
	Erreur :	7.6%	6.9%	3.6%	2.8%

Bruit non-stationnaire. On génère une observation $\boldsymbol{x}$ selon :

$$\begin{cases} x_k | h_k \sim \mathcal{N}\left(a_{h_k}; \sigma^2\right), \text{ if } k \in \{1, \ldots, \lfloor K/2 \rfloor\}, \\ x_k | h_k \sim a_{h_k} + \mathcal{E}\left(\lambda\right), \text{ if } k \in \{\lfloor K/2 \rfloor + 1, \ldots, K\}. \end{cases}$$

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{x}$	CMC	CMC-BG-di	CMC-BG	D-CMC-BG
	Erreur :	13.7%	13.7%	13.1%	10.9%

Conclusions

Introduction

Inférence variationnelle dans les CMC-BG

Segmentation d'images avec les CMC-BG

Conclusions

Références

Conclusions

- Introduction d'une variable auxiliaire latente continue qui généralise les modèles de chaînes de Markov cachées existants.
- Développement des algorithmes nécessaires à la préservation de l'interprétabilité et de temps de calculs raisonnables.
- Résultats expérimentaux en accord avec les attentes théoriques.

Références

Références

[1] Ivan Gorynin, *et al*, *Assessing the segmentation performance of pairwise and triplet Markov models*,Signal Processing, 2018.

[2] Diederik P. Kingma, *et al.*, *Auto-encoding variational Bayes*, ICLR, 2014.

[3] Hugo Gangloff, *et al.*, *A general parametrization framework for pairwise Markov models: an application to unsupervised image segmentation*, MLSP, 2021.